Физический факультет

кафедра теоретической физики

имени академика И.М.Лифшица

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ.

(Учебно-методическое пособие)

Х а р ь к о в - 2015

Тестовые задачи по курсу "Электродинамика".

1. Заряд q равномерно распределен по поверхности шара радиуса R. Записать выражение для поверхностной σ_S и ρ объемной плотности заряда.

Ответ:

$$\sigma_S = \frac{q}{4\pi R^2}; \qquad \rho = \sigma\delta(r-R) = \frac{q}{4\pi R^2}\delta(r-R).$$

2. Пусть $\vec{n}$ – вектор единичной длины, все направления которого в пространстве равновероятны. Найти усредненные значения произведений $\overline{n_i}$ и $\overline{n_i n_j}$, где n_i - проекция вектора $\vec{n}$ на ось i.

Ответ:

$$\overline{n_i} = 0, \ \overline{n_i n_j} = \frac{1}{3}\delta_{ij}.$$

3. Найти распределение заряда $\rho(r)$ и полный заряд системы Q, потенциал которой равен: $\varphi(r) = (A/r)\exp(-r/b).$

Ответ:

$$\rho(r) = A\delta(r) - \frac{A}{4\pi b^2 r}\exp(-\frac{r}{b}), \qquad Q = 0.$$

4. Найти потенциал системы φ из трех заряженных частиц (до квадрупольного приближения включительно) на больших расстояниях $r >> a \sim b$ от нее. Первая частица имеет заряд $2q$ и расположена в точке *(a,0,0)*, вторая частица имеет заряд q и расположена в точке *(0,b,0)*, третья частица имеет заряд $-3q$ и расположена в точке *(-a,0,0)*.

Ответ:

$$\varphi = \frac{q(5ax+by)}{r^3} - \frac{q}{2r^5}\left[\left(2a^2+b^2\right)x^2 - \left(a^2+2b^2\right)y^2 - (a^2-b^2)z^2\right].$$

5. Два коаксиальных равномерно заряженных кольца из тонкой круглой проволоки, с радиусами a и b зарядами $+q$ и $-q$, расположены

в одной плоскости. Найти скалярный потенциал φ на больших расстояниях $r>>b>a$ от такой системы зарядов.

Ответ:

$$\varphi = \frac{q(b^2 - a^2)}{4r^5}(3Cos^2\theta - 1).$$

6. Найти энергию взаимодействия U_{int} двух точечных диполей $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, расположенных на расстоянии r друг от друга.

Ответ:

$$U_{\text{int}} = \frac{\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2} - 3(\overrightarrow{p_1}\vec{r})(\overrightarrow{p_2}\vec{r})}{r^5}.$$

7. Найти векторный потенциал и магнитное поле шара радиуса R, равномерно заряженного по объему зарядом q и вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр, на больших расстояниях r, $r>>R$.

Ответ:

$$\vec{A} = \frac{\left[\vec{m} \times \vec{r}\right]}{r^3}, \qquad \vec{H} = \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}, \qquad \vec{m} = \frac{qr^2}{5c}\vec{\omega}.$$

8. Найти силу ***F*** и вращательный момент ***N***, приложенные к электрическому диполю с моментом ***p*** в поле точечного заряда q.

Ответ: $\vec{F} = -\dfrac{3q\vec{r}\left(\vec{p}\vec{r}\right)}{r^5} + \dfrac{q\vec{p}}{r^3}, \vec{N} = \dfrac{q[\vec{p} \times \vec{r}]}{r^3}.$

9. Найти векторный потенциал $\vec{A}$ и магнитное поле $\vec{H}$, создаваемые двумя прямолинейными параллельными токами I, текущими в противоположных направлениях. Расстояние между токами $2a$.

Ответ: $\vec{A}(0,0,A)$, $A = \dfrac{I}{c}\ln\dfrac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2}$;

$\vec{H}\,(H_x, H_y, 0)$, $H_x = \dfrac{\partial A}{\partial y}, H_y = -\dfrac{\partial A}{\partial x}.$

10. Плотность тока, создаваемого в атоме водорода спиновым магнитным моментом электрона, описывается функцией $\vec{j} = c \cdot rot(\rho(r)\vec{a})$, где $\vec{a}$ -постоянный вектор, c – электродинамическая постоянная, а ρ – объемная плотность распределения заряда в атоме; величина ρ зависит только от абсолютной величины радиуса-вектора $\vec{r}$ и обращается в нуль на бесконечности. Показать, что магнитное поле в начале координат равно

$$-\frac{8\pi}{3}\rho(0)\cdot\vec{a}\,.$$

11. Заряд e совершает гармонические колебания вдоль оси z с амплитудой a и частотой ω, ($a << c/\omega$). Найти полную интенсивность и угловое распределение излучения, усредненные по периоду. Исследовать поляризацию.

Ответ:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2a^2\omega^4}{8\pi c^3}Sin^2\theta, \quad I = \frac{e^2a^2\omega^4}{3c^3},$$ поляризация линейна

12. Заряд e движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R . Найти угловое распределение и полную интенсивность излучения.

Ответ:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2R^2\omega^4}{8\pi c^3}(1 + Cos^2\theta), \quad I = \frac{2e^2R^2\omega^4}{3c^3}.$$

13. Электрический диполь $\vec{p}$ гармонически колеблется вдоль своей оси (оставаясь параллельным самому себе) с амплитудой a и частотой ω . Найти частоту излучения и энергию, излучаемую за период.

Ответ: Частота излучения равна ω, $\Delta W = \dfrac{2\pi a^2 p^2 \omega^5}{15c^5}$.

14. Найти напряженности электрического и магнитного полей плоской монохроматической электромагнитной волны частоты ω, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси x в среде с диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями и поляризованной по кругу влево.

Ответ:

$$E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_z = A\sin(\omega t + kx), \qquad E_z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_y = A\cos(\omega t + kx), \qquad \text{где}$$

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\,.$$

15. Найти фазовую v_φ и групповую v_g скорости распространения волнового пакета в среде, диэлектрическая проницаемость которой равна

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

на больших $\omega \gg \omega_0$ и малых $\omega \ll \omega_0$ частотах.
Ответ:
при $\omega \ll \omega_0$:

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}\left(1 - \frac{\omega_p^2\omega^2}{2\varepsilon(0)\omega_0^4}\right) < c, \qquad v_g = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}\left(1 - \frac{3\omega_p^2\omega^2}{2\varepsilon(0)\omega_0^4}\right) < c,$$

при $\omega \gg \omega_0$:

$$v_\varphi = c\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) > c, \qquad v_g = c\left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) < c.$$

16. Найти потенциалы $\varphi, \vec{A}$, точечного заряда *e*, движущегося вдоль оси *z* равномерно со скоростью V .

Ответ: $$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1-\beta^2) + (z - Vt)^2}}, \qquad \vec{A} = \frac{\vec{V}}{c}\varphi.$$

17. Учитывая преобразования Лоренца и используя закон преобразования тензора второго ранга, найти формулы преобразования компонент $\vec{E}, \vec{H}$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой вдоль оси *x* со скоростью V.
Ответ:

$$E'_x = E_x, \qquad H'_x = H_x;$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

18. Обобщить закон преобразования векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при преобразовании Лоренца на случай произвольного направления вектора относительной скорости $\vec{V}$.

Ответ:

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel, \qquad \vec{H}'_\parallel = \vec{H}_\parallel;$$

$$\vec{E}'_\perp = \frac{\vec{E}_\perp + \left[\vec{\beta} \times \vec{H}\right]}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{H}'_\perp = \frac{\vec{H}_\perp - \left[\vec{\beta} \times \vec{E}\right]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

19. В лабораторной системе координат угол между напряженностями полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ равен φ. Найти систему координат, в которой они параллельны. Всегда ли задача имеет решение? Единственно ли оно?

Ответ:

$$\vec{V} = c\left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \cdot \frac{H^2 - E^2 - \sqrt{(H^2 - E^2) - 4(\vec{E},\vec{H})^2}}{2\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]^2}.$$

20. Частица с массой m_1 и скоростью v_1 поглощается частицей массы m_2, первоначально покоившейся. Найти массу M и скорость V образовавшейся частицы.

Ответ:

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}, \qquad M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}.$$

21. Квант света с частотой ω_0 рассеивается на покоящемся свободном электроне. Найти зависимость частоты ω рассеянного фотона от угла рассеяния θ.

Ответ:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1 - Cos\theta)}.$$

22. Покоящееся свободное возбужденное ядро (масса возбужденного ядра m, энергия возбуждения $\Delta\varepsilon$) излучает γ-квант. Найти частоту γ-кванта.

Ответ:

$$\omega = \frac{\Delta\varepsilon}{\hbar}\left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{2mc^2}\right).$$

23. Найти массу системы, состоящей из двух фотонов одинаковой частоты ω, если угол между их волновыми векторами равен θ.

Ответ:

$$M = \frac{2\hbar\omega}{c^2} Sin(\theta / 2).$$

24. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется с релятивистской скоростью в однородном электрическом поле $\vec{E}(E,0,0)$. При t = 0 частица находилась в начале координат и имела импульс $\vec{p}_0(0,p_0,0)$.. Найти закон движения частицы - явную зависимость $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$.

Ответ: $\vec{v}(v_x(t), v_y(t), 0), \quad \vec{r}(x(t), y(t), 0);$

$$v_x(t) = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2}},$$

$$v_y(t) = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2}};$$

$$x(t) = \frac{1}{eE}\left(\sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} - \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2}\right),$$

$$y(t) = \frac{cp_0}{eE} Arsh\left(\frac{ceEt}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2}}\right).$$

25. Точечный заряд q находится на расстоянии a от центра заземленного проводящего шара радиуса R . Найти потенциал φ, плотность поверхностных зарядов σ_S и полный заряд Q, индуцированный на шаре, энергию U_{int} и силу взаимодействия F точечного заряда с шаром.

Ответ:

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2arCos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'rCos\theta}},$$

$$e' = -e\frac{R}{a}, \quad a' = \frac{R^2}{a};$$

$$\sigma_S = -\frac{q(a^2 - R^2)}{4\pi R(a^2 + R^2 - 2aRCos\theta)^{3/2}}; \quad Q = -qR/a;$$

$$U_{\text{int}} = -\frac{q^2R}{2(a^2 - R^2)}; \quad F = -\frac{q^2Ra}{(a^2 - R^2)^2}.$$

26. Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок *a и b* диэлектрическая проницаемость меняется по закону

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 = const \quad \text{при } a \le r < c, \\ \varepsilon_2 = \text{const} \quad \text{при } c < r < b. \end{cases}$$

где $a<c<b$. Найти емкость C конденсатора, распределение связанных зарядов $\sigma_{св}$ и полный связанный заряд в диэлектрике.

Ответ:

$$C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right]^{-1} .$$

Связанные заряды находятся в местах неоднородности диэлектрика, т.е. на сферах радиусов *a, b, c*:

$$\sigma_{a,св} = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}, \sigma_{b,св} = \frac{q}{4\pi b^2} \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}, \sigma_{c,св} = \frac{q}{4\pi c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right),$$

где q – заряд внутренней обкладки конденсатора. Полный внутренний заряд конденсатора равен 0.

27. Проводящий шар радиуса R разрезан на два полушария, соединенные между собой, и помещен во внешнее однородное поле E_0 , направленное перпендикулярно плоскости разреза. Найти силу, действующую на каждое из полушарий.

Ответ:

$$F = \frac{9}{16} R^2 E_0^2 .$$

28. Заряд q расположен в точке $\vec{a}\,(0,0,a)$ на расстоянии a от плоской границы раздела $z=0$ двух полупространств с диэлектрическими проницаемостями ε_1 (при $z>0$) и ε_2 (при $z<0$). Найти потенциал φ и силу $\vec{F}$, действующую на заряд.

Ответ:

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{q}{\varepsilon_2 r_2}, \quad z > a,$$

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{q}{r_1}, \quad z < a, \quad r_1 = |\vec{r} - \vec{a}|, \quad r_2 = |\vec{r} + \vec{a}|;$$

$$\vec{F}\,(0,0,F), \quad F = \frac{q^2}{4a^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}.$$

29. Диэлектрический шар радиуса a с диэлектрической

проницаемостью ε .помещен в однородное внешнее электрическое поле E_0 . Найти потенциал.

Ответ:

$$\varphi = \varphi_1 = -\frac{3}{\varepsilon + 2} \cdot (\vec{E}_0 \vec{r}) \quad (r < a),$$

$$\varphi = \varphi_2 = -(\vec{E}_0 \vec{r}) + \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}, \quad \vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot a^3 \vec{E}_0 \quad (r > a);$$

30. Собственные емкости двух проводников, находящихся в однородном диэлектрике с проницаемостью ε, равны C_1 и C_2 , их потенциалы V_1 и V_2, расстояние между проводниками r много больше их размеров. Найти действующую между ними силу F.

Ответ: $F = \dfrac{\varepsilon \cdot C_1 C_2 (\varepsilon \cdot rV_1 - C_2 V_2)(\varepsilon \cdot rV_2 - C_1 V_1)}{(\varepsilon^2 r^2 - C_1 C_2)^2}.$

31. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный провод радиуса a, магнитная проницаемость которого μ_0. Пространство между проводом и оболочкой заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ. Найти коэффициент самоиндукции L такой линии на единицу длины.

Ответ: $L = \dfrac{1}{2}\mu_0 + 2\mu \ln \dfrac{b}{a}.$

32. Найти взаимную индукцию тонких коаксиальных колец с радиусами a и b , лежащих в параллельных плоскостях. Расстояние между плоскостями h . Рассмотреть случай $h >> a \sim b >> r$, где r-толщина провода.

Ответ:

$$L = \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{h^3}.$$

33. Плотность электронного облака в атоме водорода описывается функцией $\rho(\vec{r}) = -\dfrac{e_0}{\pi \cdot a_0^3} \exp\left(-\dfrac{2r}{a_0}\right)$, где a_0 – постоянная. Вычислить поляризуемость β атома в слабом внешнем поле, пренебрегая деформацией электронного облака. Как изменится поляризуемость,

если считать, что электронное имеет постоянную плотность внутри сферы a_0?

Ответ: $\beta = \frac{3}{4} a_0^3$. Если заряд электрона распределен равномерно внутри сферы с радиусом a_0, то $\beta = a_0^3$.

34. Атом со сферически симметричным распределением заряда помещен в однородное магнитное поле ***H***. Показать, что добавочное поле около ядра, обусловленное диамагнитным током, равно:

$$\Delta \vec{H} = -\frac{e\vec{H}}{3mc^2}\varphi(0),$$

где $\varphi(0)$- электростатический потенциал, создаваемый около ядра атомными электронами, e и m – заряд и масса электрона.

35. Две молекулы в газе имеют дипольные моменты $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ и находятся на расстоянии R друг от друга. Вследствие столкновений с другими молекулами их ориентации будут меняться. Вероятность данной взаимной ориентации определяется больцмановским множителем, в котором U следует считать энергией взаимодействия двух диполей. Предполагая выполненным условие $U \ll kT$, показать, что величина U, усредненная по распределению Больцмана, имеет вид:

$$U(R) = -\frac{2p_1^2 p_2^2}{3kTR^6}.$$

Литература.

1. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. "Сборник задач по электродинамике". Москва. РХД. 2002, 640 стр.
2. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Современная электродинамика, часть 1. Микроскопическая теория: Учебное пособие. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 736 стр.